第三章 《九章算术》及其历史地位和影响

§3.1 《九章算术》简介

一、《九章算术》的成书

《九章算术》（简称《九章算术》）是中国最重要的数学经典， 约成书于公元前 1 世纪，稍晚于《周髀算经》。《九章算术》集先秦到西汉数学知识之大成。据东汉末大学者郑玄(公元 127 一 200 年)引东汉初郑众(?～公元 83 年)说，西汉在先秦“九数“基础上又发展出勾股、重差两类数学方法。由于秦朝焚书而散坏，西汉张苍(?～公元前 152 年)、耿寿昌(公元前 1 世纪)收集秦火遗残，加以整理删补，便成为《九章算术》[1]。

二、《九章算术》的结构、内容和体例

《九章算术》确定了中国古代数学的框架、内容、形式、风格和思想方法的特点。全书共分九章，有 90 余条抽象性算法、公式，246 道例题及其解法，基本上采取算法统率应用题的形式，包括丰富的算术、代数和几何内容。《九章算术》是以计算为中心以解决实际问题为目的的算法体系，在结构上总体可分为：“问”、“答”、“术”。如果几个相连的题的解法完全相同，就把“术”放在这一类题目的最后一题解答之后，作为一般性的算法。还有几章，在章名之后，第一题之前给出了“术”，带有全章总术的性质，这是更为一般性的抽象算法。书中的 246 题，几乎全是应用题，这些问题按不同的用途归为九大部分，故名《九章算术》。

下面简介各章内容和主要成就：

“方田”章：（38 问）主要讲平面图形的计算，包括系统的分数算法， 提出了完整的分数运算法则，各种多边形、圆、弓形等的面积公式。

“粟米”章：（46 问）粮食交换中的比例问题，讨论了各种比例算法。

“衰分”章：（20 问）”：“衰”是按比率，“分”是分配。这里是比例算法在分配物资等问题中的应用，提出了比例分配法则。

“少广”章：（24 问）开平方、开立方问题，给出了完整的开平方、开立方程序

“商功”章：（28 问）：“商”是估算，“功”是工程量。这里是土木工程中的体积计算，讨论各种立体体积公式及工程分配方法。

“均输”章：（28 问）主要是纳税和运输方面的计算问题，解决赋役中的合理负担，也是比例分配问题，还有若干结合西汉社会实际的比较复杂的比例算法。

“盈不足”章：（20 问）算术中盈亏问题的解法。用盈不足术解决的一般算术问题。

“方程” 章：（18 问）主要讲线性方程组解法，还论及正负数概念及加减运算法则

“勾股” 章：（24 问）主要是勾股定理的应用、出入相补原理及其在几何中的应用和各种测量术。

三、《九章算术》的主要成就

《九章算术》中的数学成就是多方面的：

---

[1] 郭书春，《中国古代数学》，商务印书馆，1997 年，第 6-7 页。

（1）在算术方面，主要成就有中国建立了世界上最早、最系统的分数理论，包括分数的四则运算及比较分数的大小，求分数的最大公约数和最小公倍数算法、从最简单的比例问题到“盈不足”算法以及“方程术”，都体现了中国以率作为“算法之纲纪”的特点。《九章算术》在第粟米、衰分、商功这三章中有许多比例问题，在世界上是比较早的。“盈不足”算法需要给出两次假设，是一项创造，中世纪欧洲称它为“双设法”，有人认为它是由中国经中世纪阿拉伯国家传去的。在中世纪阿拉伯国家的数学著作中，这种算法常被称为“契丹算法”，说明是由中国传人的。在欧洲早期的著作中，也有人沿用“契丹算法”这一名称。

(2)在代数方面，主要有线性方程组的解法、不定方程及其解、开平方、开立方、一元二次方程解法等。“方程术”实为线性方程组的解法。“方程”形式完全对应于现代数学线性方程组的增广矩阵。解“方程”的过程实际上就相当于对上述矩阵施行的种种行的变换的过程。“方程”一章还在世界数学史上首次引入了负数及其加减法运算，还有世界上最早的开平方、开立方程序算法。

(3)在几何方面，主要是提出了各种平面图形的面积、多面体等体积的计算公式，给出了重要的“以盈补虚”的方法和勾股理论的应用。在处理几何问题时，往往归结为数的运算，体现了中国形数结合的思想，“以盈补虚”的方法后来发展成为中国传统的出入相补原理。

四、《九章算术》的历史地位及其影响

1.《九章算术》在中国数学史上的地位和影响

《九章算术》是我国算经之首，在中国数学史上是一部承前启后的及其重要的著作，对后世数学发展产生了深远的影响。

（1）《九章算术》为中国古代数学著作提供了数学著作的范例和样板

《九章算术》的体例对后世著作影响深远。以后的数学著作，大体采取两种方式：一种是以《九章算术》为楷模编撰新的著作，如《孙子算经》、《张丘建算经》、《数书九章》、《四元玉鉴》等，它们大都采取术文统率应用问题的形式，具有如《九章算术》那种数学理论密切联系实际需要，以计算为中心的特点。另一种是采取为《九章算术》作注的形式，以《九章算术》研究为内容。在 13 世纪中叶以前，中国传统数学的主要成果大多是在研究《九章算术》中取得的。可以说，在秦九韶《数书九章》问世以前，中国传统数学基本上都是在《九章算术》的基础和框架下发展的。

（2）《九章算术》已经建立了中国古代数学的基本框架

从结构和内容上说，《九章算术》之后，新编撰的算经虽然有的在一些方面超过《九章算术》，讨论了新的问题，而从总体上讲，除同余式解法和高阶等差级数求和之外，中国传统数学基本上是在《九章算术》的框架之内发展，有的著作就是在《九章算术》的一部分甚至一个题目的术文上演化而来，有的著作也称为“九章”，还有更多的著作甚至径直沿用《九章算术》各卷的卷名、章名，足见其影响之深远。

（3）《九章算术》奠定了中国古代数学教育体系的基础

《九章算术》既是中国最重要的数学经典，同时又是我国古代算学教科书的典范，《九章算术》奠定了中国古代数学教育体系的基础。唐以来被钦定为主要数学教科书，影响极其深远。

《九章算术》的十分显著的特点是为我国数学教育的教材体系打下了基础，形成了中国古代数学教育内容体系的特点：

1）开放的、归纳的、应用体系

《九章算术》的内容几乎都是来自于社会生产、生活的实践，数学教育的目的主要在

于“经世致用”，就是为了解决这些实际问题，掌握数学实用技能和技艺。因此，数学表达体系采用由个别到一般的推导方式组成，按数学方法进行归纳、综合、形成各章，解决各种类型的实际问题，这种开放的归纳体系实际上是一种应用数学的体系。

2）算法化的内容

书中设有“问”、“答”、“术”。“术”即算法，是《九章算术》着重指出的内容，以“术”设题，改进和发展算法是数学的根本，是中算家孜孜以求的目标，正因为如此，《九章算术》的教育内容体系驾驭了中国数学教育两千多年，并为充实和形成我国数学教育的教材体系打下了坚实的基础。

2. 《九章算术》在世界数学史上的地位

《九章算术》不仅在中国数学史上具有巨大的影响，在世界数学史上也占有崇高的地位。作为一部世界科学名著，《九章算术》在隋唐时期就已传入朝鲜、日本。现在它已被译成日、俄、德、英、法等多种文字。它之于中国和东方数学，大体相当于《几何原本》之于希腊和欧洲数学。在世界古代数学史上，《九章算术》与《几何原本》像两颗璀璨的明珠，东西辉映。

（1）《九章算术》决定了世界数学研究重心由地中海沿岸的希腊地区转换到了太平洋西海岸的华夏大地。在《九章算术》成书之前，古希腊数学从公元前 6 世纪开始，得到了快速发展，出现了毕达哥拉斯、欧多克索斯、欧几里得、阿基米德等一大批数学泰斗，但从阿基米德、阿波罗尼奥斯以后，希腊数学呈现衰落的趋势，至公元前 1 世纪前后，已是强弩之末了。此时《九章算术》如异军突起，出现在亚洲的东方，这是世界数学史上的一件大事。

（2）《九章算术》标志着数学研究的对象和成果形态的重要转变，即由以空间形式的性质为主，以几何学为研究中心，以严密的公理化体系为理论系统的数学，向以数量关系为研究对象，以计算为中心，以术文统帅应用问题为体例的数学转变。在世界数学著作中，《九章算术》可以与《几何原本》相媲美，两书东西辉映，对世界数学的发展都发挥了重要作用。

§3.2　中国古代分数算法

在人类数学史上，人们认识分数比认识小数早得多，中华民族是世界上使用分数最早的民族之一，公元前 4、5 世纪时，分数已在中国广泛应用了，　先秦典籍和《周髀算经》中有大量分数运算的记载。中国古代数学经典《九章算术》集其大成，在世界上第一次建立了完整的分数理论，并发展成为以解题为中心的机械化算法体系。

一、《九章算术》中的分数四则运算

《九章算术》中有比较完整的分数计算方法，包括四则运算、通分、约分、化带分数为假分数(我国古代称为“通分内子”，“内”读为“纳”)等等，其步骤与方法大体与现代相同。

《九章算术》提出了一系列完整的分数运算的法则，如分数加法法则——合分术；分数减法法则——减分术；分数乘法法则——乘分术；分数除法法则——经分术。此外，还提出了比较分数大小的方法——课分术以及求分数平均值的方法——平分术等。这些“术”均言简意赅，实质都是一个个机械化的算法程序。

二、约分与最大公约算法程序

分数算法的一个重要程序是约分。《九章算术》方田章在提出各种分数运算法则之前，首先就是约分术，约分即化简分数，而不改变分数值。在合分术、减分术、课分术以及平分

术中都需要通分。约分和通分是整个分数算法的关键技术，包括对整数最大公约数和最小公倍数的算法，更体现了中国古代数学以筹为算具的筹式演算的特点和计算方法程序化、机械化的思想特征。

中算家无质因数的概念和算法，故没采取将整数分解成质因数进行约分，而是采用“更相减损”这样一套机械化的算法，求“等数”来约分。

《九章算术》的约分程序是：

可半者半之， 不可半者，副置分母、子之数，以少减多， 更相减损，求其等也。以等数约之。

由此看来，中国古算约分术即求等数的方法，其实质是术文中的更相减损过程，由于此过程终可在有限步骤内实现，故它是一种构造性方法。此“更相减损求等”法与欧几里得《几何原本》第 7 卷第 2 题求最大公约数法的原理是相通的。以《九章算术》方田章第 6 问约简为例，用现代形式写出两种方法程序如图 3－1：

[49， 91] → [49， 42]
[7 ， 42] → [7 ， 35]
→⋯→ [7 ， 7]

更相减损求等法

	9 1	4 9	1
	4 9	4 2	
1	4 2	7	6
	4 2		
	0		

辗转相除法

图 3 － 1

三、通分和最小公倍算法程序

《九章算术》方田章中的合分、减分两术中均用到通分，以“母相乘为法”，即以分母的乘积为公分母，这样的公分母一般并不是原诸分母的最小公倍数。关于通分，刘徽在合分术注中说：“乘而散之，所以通之。通之则可并也。”通分根据的是分数变形规则“乘而散之”，包括“母同”和“子齐”两个方面。“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。”

以上分数运算的方法是世界上最早的分数运算法则，分数算法大约 15 世纪才在欧洲通行，当时人们认为来自印度而经阿拉伯传入欧洲。事实上印度到 7 世纪的婆罗门笈多（Brahmagupta，598～665 年）才有分数四则运算的法则，且与中国相同，因此说这些方法源于中国是有道理的，而且正是由于分数理论的建立和不断发展，从而带动了整数论的研究，并取得了世界意义的重要成果。

§3.3 中国古代的盈不足算法及其方法论意义

关系（Relationship）、映射（Maping）、反演（Inversion）原理简称 RMI 原理，是指如下处理问题的一种思想原则：即给定一个含有目标原象 x 的关系结构 S，如果能找到一

个可定映映射 ψ，将 S 映入或映满 S*，则可从 S*通过一定的数学方法（定映手续）把目标映射 X*= ψ(x)确定出来，进而通过反演 ψ^{-1} 又可把 x= ψ^{-1}(x*)确定出来，这样，原来的问题就得到了解决。用框图表示如图３－４。

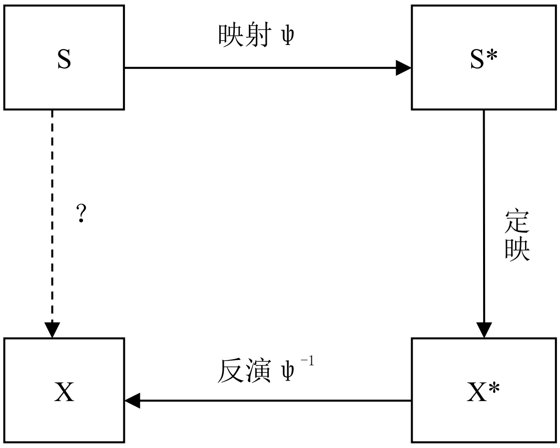


图３－４

其过程有如下的步骤：关系→映射→定映→反演→得解。

从古算理论的渊源来说，盈不足术无疑是我国古代独立的创造，实质也是 RMI 的表现。在数学发展的早期，要解决复杂的问题很不容易，中国古算家通过两次假设与检验（如刘徽所谓的“课”)，即把实际应用问题构造成特定的盈、不足模式：

$$\text{假令}\quad \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \\ \text{盈}\quad\ \ \text{不足} \end{array}$$

这实际上是数学问题的一种“模式化”构造过程，即 RMI 中的映射 ψ。通过这种模式化构造，一般应用问题（这相当于 RMI 中的 S）就转化为特定的盈不足问题（这相当于 RMI 中的 S*）求解。

《九章算术》盈不足章的前八题，以“共买物”问题为模型，给出了各类盈不足问题求解的演算法则，盈不足问题可表达为下面的数学模型：

今有共买物，人出（钱）a_1，盈 b_1；人出（钱）a_2，不足 b_2，问人数、物价各几何?

《九章算术》给出了两种盈不足术，其一为：

“置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并，以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。”

依据造术原理，作为 RMI 定映手段的盈不足术的演算过程就是以齐同原理、今有术为基本内容的率的变换，是基于直线内插思想运用和机械化的算法。

$$\begin{matrix}\text{置所出率}\\ \text{盈、不足}\end{matrix}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{维乘}} \begin{bmatrix} a_2b_1 & a_1b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{相并}} \begin{bmatrix} a_2b_1 + a_1b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \begin{matrix}\text{实}\\ \text{法}\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{实如法而一}} \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{b_1 + b_2}\ \text{为每人应付的钱数。}$$

$$[a_2\ b_1] \xrightarrow{\text{以少减多}} a_1 - a_2 \longrightarrow \begin{cases} \text{约实} \rightarrow \dfrac{a_2b_1 + a_1b_2}{a_1 - a_2}\text{为物价} \\ \text{约法} \rightarrow \dfrac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}\text{为人数} \end{cases}$$

用现代的符号来表示：设每人出 a_1 钱，盈 b_1 钱；每人出 a_2 钱，不足 b_2 钱，求物价 x 和人数 y．依据术文得下列两个公式：

$$x = \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{a_1 - a_2}, y = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

当然我们还可以算出每人应该分摊的钱数：

$$z = \frac{x}{y} = \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{b_1 + b_2}$$

因此上述的盈不足术实际上包含着三个公式．

盈不足算法程序具有一般性，其他类型的盈亏算法程序都可统一地化归为盈不足算法程序，求解公式在本质上也都是一致的。《九章算术》用盈不足算法解决了许多较复杂的应用问题，充分证明这种方法在古代应用的普遍性。

总结盈不足算法的实际应用，盈不足的构造为人们提供了处理问题的 RMI 方法，因为问题本身是来自原型的，是现实中的问题。其中许多都是较复杂的实际问题，当以两次假设提出盈不足构造问题时，实现了从现实原型到盈不足模型的对应关系这是映射 ψ，此时的问题已是模型化了的问题，这是定映 S*；盈不足术即是针对这种数学模型的算法，由于具有一般性和机械性的特点，按程序一步步运筹即得盈不足公式，把问题中的数据代入公式，得到盈不足问题的解，再回到实际问题的解，就是反演 ψ^{-1} 。盈不足模型化方法可用图 3－5 表示：

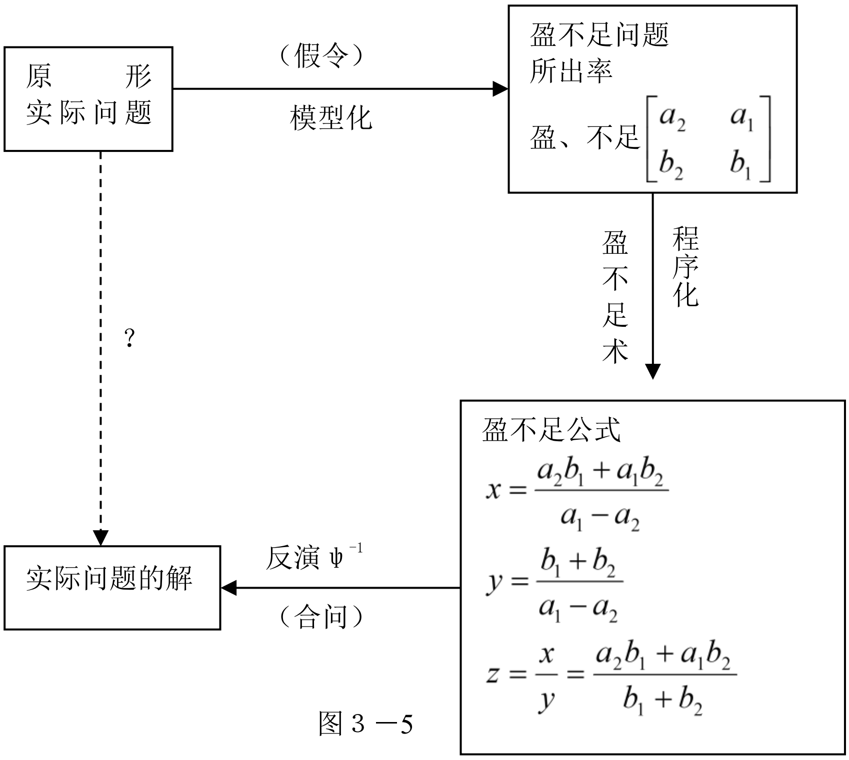


图 3 －5

盈不足具有模型化的方法，这是从数学方法论的角度来分析的，是说一般的“盈不足问题”就是所构造的数学模型。从现代意义上讲，“数学模型乃是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系，采用形式化的数学语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构。古代的数学模型当然没有这样严格，我们也不能苛求古人“形式化的数学语言”，对“数学结构”也只能作简单化的解释。但是，无论如何，这种把问题一般化，以特定的数学模型来处理一大类应用问题的方法，正是中算家所擅长的。实际上，对线性关系的数学问题，都可以应用盈不足模型化方法求出准确解。

例 1：《九章算术》盈不足章第 13 题：

今有醇酒一斗，值钱五十；行酒一斗，值钱一十。今将钱三十，买酒二斗。问醇、行酒各几何?

本题的术文是：

假令醇酒五升，行酒一斗五升，有余一十。令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二。”

古代的换算关系是：一斗为十升。

这实质上就是依据 RMI 方法，巧妙利用两次假设，构造盈不足模型，例如若把醇酒改成每人出钱数，本题就转化为：

今有共买物，人出（钱）五，盈一十；人出（钱）二，不足二，问每人应出多少钱?

因此，对于醇酒，有盈不足模型：

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$代入盈不足公式就可求得醇酒：$\dfrac{2\times10+5\times2}{10+2}=\dfrac{5}{2}$（升）。

同样，对于行酒，也可得出盈不足模型：

$\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$代入盈不足公式就可求得行酒：$\dfrac{18\times10+15\times2}{10+2}=\dfrac{25}{2}$（升）。

综上所述，我们不难得出这样的结论：

（1）盈不足术是中国数学史上解应用问题的一种别开生面的创造，它在我国古代算法中占有相当重要的地位．盈不足术还经过丝绸之路西传中亚阿拉伯国家，受到特别重视，被称为“契丹算法”，后来又传入欧洲，中世纪时期“双设法”曾长期统治了他们的数学王国．

（2）从分数算法的出现，到盈不足的问世，我国古代数学家在寻求数学应用问题的普遍解法的道路上，经过了长期的探索而卓有建树，中算理论在数学问题模式化与解法程序化方面不断进入更高的水平，充分显示出古代传统数学构造性与机械化的特色。

§3.4 “方程”之模型构造及演算程序

一、对“方程”模型及其解之构造

“方程”的本义，就是“并而程之”。细言之，即把诸物之间的各数量关系并列起来，考核其度量标准。就把各“程”中的各物及总实的数码按行列排列整齐，从右向左布列为一个筹码方阵，如图３－６（这里用字母代替古代筹码）。正负数引入后，刘徽正负术注云：“故赤黑相杂足以定上下之程。” “方程”中各位之数可正可负，“自有赤黑相取。”扩大了“方程”应用的范围。

这种筹算以分离系数法表示“方程”，其形式完全对应于现代数学中线性方程组的增广矩阵，从对“方程”解法之构造来说，“令每行为率”即是视“方程”每行为一组率，这一原则的确定，为上述矩阵施行种种行的变换和算法机械化提供了条件。“行之左右无所同存”是说同一“方程”中不应出现两行数字相同或相同的率，这一原则与“皆如物数程之”共同构成“方程”解的适应性即解的唯一性的条件。

$$\begin{array}{cccc|l} \text{n程} & & \text{2程} & \text{1程} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{21} & a_{11} & \text{物1} \\ a_{n2} & \cdots & a_{22} & a_{12} & \text{物2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} & \text{物n} \\ b_n & \cdots & b_2 & b_1 & \text{实} \end{array}$$

图３－６

二、对“方程”的程序设计——《九章算术》的“遍乘直除”程序

对“方程”的程序设计，是数学构造性方法精彩的一例。由于“方程”模型及其解之特殊构造性，决定了可以对它施行种种行的消元变换的过程，因而构造性就与算法的机械化特色联系在一起。从现代观点来说，“方程”的演算程序类似于矩阵的“初等变换”算法，即相当于利用线性方程组的系数增广矩阵进行初等变换来求解。

以“方程”章第一问为例：

今有上禾三秉、中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉、中禾三秉，下禾一秉，

实三十四斗；上禾一秉、中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

本例实际是解下面的线性方程组：

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, & (1) \\ 2x+3y+z=34, & (2) \\ x+2y+3z=26, & (3) \end{cases}$$

《九章算术》首先采取在算板上布列“方程”，然后反复对“方程”施行基本的运算即“遍乘”，“直除”的行变换。

程序（1）即按分离系数法将前后三次试验所得的十二个数据布列成右、中、左三行排列成现代矩阵形式如下（图３－７）：

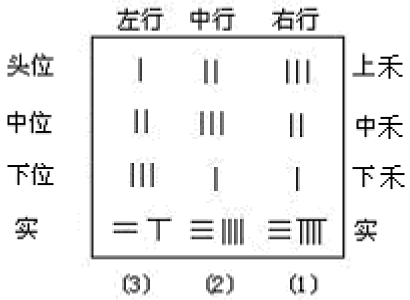


图3－7

将其翻译成现代数学矩阵就是：

$$\begin{array}{r|ccc|l} \text{头位} & 1 & 2 & 3 & \text{上禾} \\ \text{中位} & 2 & 3 & 2 & \text{中禾} \\ \text{下位} & 3 & 1 & 1 & \text{下禾} \\ & 26 & 34 & 39 & \text{实} \end{array}$$

程序中的遍乘直除过程，相当于对如下增广矩阵的消元变换：

“方程”术就是以《九章算术》“方程”章首题为范例用直除法解线性方程组的完整程序。在以后的“方程”类问题中，开头就是说“术曰如方程”，有时紧接着列出的数据——这相当于现代算法语言中的“调用”（Calling ）标准程序和给参量“赋予”（Assigning）新值。

三、不定问题---五家共井

《九章算术》方程章有一“五家共井”题：

今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，以丙一绠；丙四绠不足，以丁一绠；丁五绠不足，以戊一绠；戊六缓不足，以甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深、绠长各几何?

设甲、乙、丙、丁、戊家绳长分别为x, y, z, u, v,井深为w.依术列出方程是：

$$\begin{cases} 2x + y = w \\ 3y + z = w \\ 4z + u = w \\ 5u + v = w \\ x + 6v = w \end{cases}$$

《九章算术》按方程术解，得出 x=265，y=191，z=148，u=129，v=76，w=721。刘徽指出,《九章算术》的解法是“举率以言之”，实际上只给出了最小的一组正整数解。此是不定问题，是中国数学史上首次明确提出的不定问题。

§3.5 《九章算术》的开方算法

中国古代的开方法以及一元二次、三次或高次数字方程解法是代数方程的经典算法。《九章算术》少广章提出了完整的开平方、开立方程序 。

一、《九章算术》的开平方程序

“开方”，是指开平方。这实质上可以看作由正方形面积求其一边之长，即开平方相当于求 $x^2=N$ 的根。《九章算术》中给出了开平方、开立方的方法，而且计算步骤和现在的基本一样。所不同的是古代用筹算进行演算，这是中国早期数学的一项重要成就。如少广章第 12 题：

今有积五万五千二百二十五步．问为方几何”？

答曰：二百三十五步。

这里所说的步是我国古代的长度单位。

通过对筹算开平方法的分析，可知它是根据下面这些公式来逐步推求的，与现代的迭代方法完全一致，可以通过计算机来实现：

$$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b$$
$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+[2(a+b)+c]c$$
$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+[2(a+b+c)+d]d$$
$$\cdots\cdots$$

开平方术文还有对几种特殊情况的处理方法：一是被开方数为分数的情形，要“通分内子”，若分母是平方数，则分子、分母分别开方，然后相除，即 $A=\dfrac{b}{a}, \sqrt{A}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$；若分

母不可开，则以分母乘分子，开分子后再以分母除，即：$A=\dfrac{b}{a},A=\dfrac{ab}{a^2},\sqrt{A}=\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$ 。二是开方不尽的情形，这相当于求无理根，称为不可开，求出整数部分后，“以面命之”。

显然，有了以上的程序和处理方法，任何一个数都可以开平方，说明《九章算术》的术文更具有抽象性、普适性。

《九章算术》中共有五道专门提供开平方演算的问题，在其他一些题目中也涉及到开平方运算。

中国古代数学将求二次方程 $x^2+bx+c=0$(b，c>0)的正根称为开带从平方法，《九章算术》虽未给出开带从平方的程序，但是开方术中从求根的第二位得数起，便是求形如 $x^2+bx=c$(b>0，c>0)的方程的正根的程序，因此，实际上，《九章算术》已经包含了开带从平方的程序。

例 2：《九章算术》勾股章第 20 题：

今有邑方不知大小，各中开门，出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木，问邑方几何?

答曰：二百五十步。

术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之，为实．并出南、北门步数为从法，开方除之，即邑方。

本题相当于：

已知：如图 3－ 8 所示，CD=20 步，EB=14 步，BF=1775 步，求 CE.

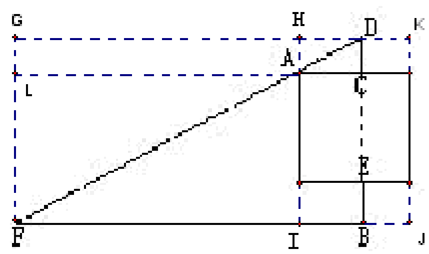


图 3—8

设邑方CE为x,因为$S_{矩形ALGH}=S_{矩形AIBC}$

所以，$S_{矩形CDGL}=S_{矩形DHIB}$

因此，$S_{矩形HIJK}=2S_{矩形CDGL}$

也就是：

$EC(CE+CD+EB)=2CD\times BF$

即：$x(x+20+14)=2\times 20\times 1775$

整理得：$x^2+34x=71000.$

这是一个解数字二次方程的问题，实为 2CD • BF=2×20×1775=71000，这种二次方程

有一个正系数的一次项，我国古代称这个一次项为“从法”，即 34 为从法。《九章算术》少广章开平方术虽然专为开整平方而建立，但是也可以求解一般的二次方程问题. 解这种二次方程只需开带“从法”的平方，或简称为“开带从平方”，从而可求得方程的正根。

二、《九章算术》的开立方程序

开立方相当于求 $x^3=N$ 的根。

《九章算术》少广章有四道应用开立方演算的问题。下面以少广章第 19 题为例来解释术文，说明开立方程序。原题为：

“又有积一百八十六万八百六十七尺。问为立方几何？”

通过分析上面的筹算开立方方法，可知它是根据下面这些公式来逐步推求的，也和现代迭代的方法完全一致，可以在计算机上实现。

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$

$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c$$

$$(a+b+c+d)^3=(a+b+c)^3+[3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2]d$$

《九章算术》也未给出开带从立方的程序，但是开立方术中从求根的第二位得数起，便是求形如 x3+bx 2 +cx=d(b>0，c>0，d>0)的方程正根的程序，因此，实际上，《九章算术》也已经包含了开带从立方的程序。

以上开平方、开立方、开带从平方和立方程序，共同构成中国古代数学一个独立的算法程序系统——开方算法程序系统，《九章算术》中开方算法程序不仅表现了中国筹算所能达到的高超的算技，而且充分体现了中国数学思想方法的构造性和算法机械化特色。

三、无理数的发现

中国古代数学家在开方运算中接触到了无理数。《九章算术》开方术中指出了存在有开不尽的情形：“若开方不尽者，为不可开”，《九章算术》的作者们给这种不尽根数起了一个专门名词——“面”。“面”，就是无理数。与古希腊毕达哥拉斯学派发现正方形的对角线不是有理数时惊慌失措的表现相比，中国古代数学家却是相对自然地接受了那些“开不尽”的无理数，这也许应归功于他们早就习惯使用的十进位置值制，这种十进位置值制使他们能够有效地计算“不尽根数”的近似值。为《九章算术》作注的三国时代数学家刘徽就在“开方术”注中明确提出了用十进制小数任意逼近不尽根数的方法，他称之为“求微数法”，并指出在开方过程中，“其一退以十为步，其再退以百为步，退之弥下，其分弥细，则......虽有所弃之数，不足言之也”。

§3.6 《九章算术》及其刘徽注中的几何成就

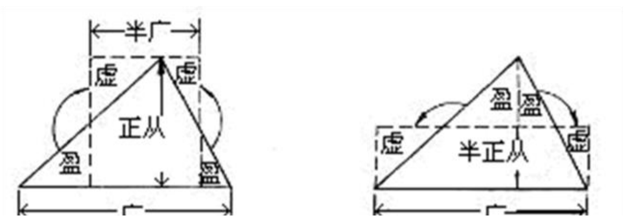
中国古代的几何一般不讨论图形离开数量关系的性质，而是要计算出长度、面积和体积，用于解决实际问题。《九章算术》总结了生产、生活实践中大量的几何知识，在方田、商功和勾股章中提出了很多面积、体积的计算公式和勾股定理的应用，刘徽在对《九章算术》作注时进行了重要的改进和创新，形成中国特有的几何学成就和解决几何问题的方法，现分别介绍如下：

一、多边形面积计算

《九章算术》方田章主要论述平面图形直线形和圆的面积计算方法。

（1）长方形面积。长方形在古代称为“方田”或“直田”。这里实际上给出面积公式为 S=ab 和计算方法。刘徽用“幂”作为面积的定义：**“凡广从相乘谓之幂”。**可见幂的涵义与今天指的乘方不同。

（2）三角形面积。三角形在古代称为“圭田”。《九章算术》给出面积公式为**“半广以乘正从”**。这里“广”是指三角形的底边 a，“正从”是指底边上的高 h，公式为 S=$\frac{1}{2}$ah。刘徽在注文中对这一计算公式实质上作了证明：**“半广者，以盈补虚，为直田也.”“亦可以半正从以乘广”**。(图 3－9) “以盈补虚”又称为 “出入相补”，即是通过图形的平移或割补，以多余部分填补不足的部分，这是我国古代数学推导和解决有关面积、体积和勾股等几何问题的主要传统方法之一。



（１）半广以盈补虚　　　（２）半正从以乘广

图 3 － 9

（3）梯形面积。直角梯形称为“邪田”(即斜田)。《九章算术》在把它的面积公式是：（方田章第 27，28 题）“术曰：并两邪[2]而半之，以乘正从……，又可半正从……以乘并。”面积公式为：S=$\frac{1}{2}$（a+b）h. 刘徽在注中说明他的证法仍是出入相补法. 如图 3－10（1），另外也可以用如图 3－10（2）的出入相补法来证明。

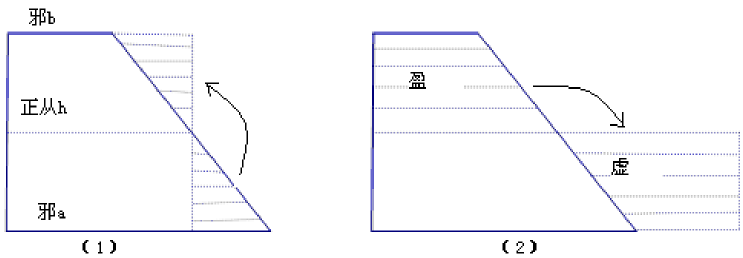


图3－10

[2] 邪，即斜。在这里，两邪应理解为梯形两底。

《九章算术》把一般梯形称为“箕田”（方田章第 29、30 题），上、下底分别称为“舌”、“踵”，面积公式是：“术曰：并踵舌而半之，以乘正从。”公式同上一致。可用如图 3－11 所示的出入相补法证明。

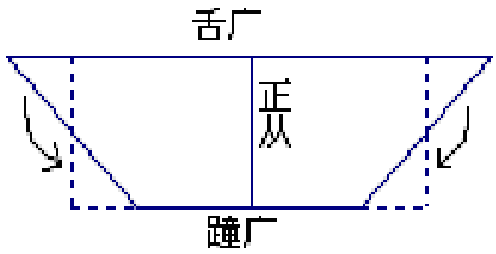


图3—11

二、圆与曲边形的面积计算

（1）圆面积。九章算术》提出圆面积计算方法为：“半周半径相乘得积步”（方田章第 31、32 题），这里“周”是圆周长，“径”是指直径．公式为：$S=\frac{1}{2}lr$。（2）弓形面积。弓形田在古代称为“弧田”。（3）圆环面积。古代称圆环的田为“环田”。（4）宛田面积。古代的宛田实指球冠形的田地。有的并不准确（如图 3－13）。刘徽在

综上所述，可以认为《九章算术》时代已有常见的平面图形(直线形与圆)面积计算公式，特别是通过刘徽的工作，不仅提出了公式的准确性，也丰富了公式的内容和计算方法，这说明当时运用这些公式已经比较成熟。

三、多面体、球与曲面体的体积的体积计算

在《九章算术》商功章中，针对一些有关体积计算的实际问题，提出了许多多面体体积的计算方法。《九章算术》给出了长方体或正方体体积计算公式：V=abh。在此基础上来计算其他立体图形体积，如（1）直棱柱（2）棱锥、棱台。《九章算术》商功章还有圆柱、圆锥、圆台(古代称“圆亭”)的体积计算公式。但由于当时取 $\pi=3$ 。还有球与曲面体的体积的计算公式等。关于球体积。我国古代把球称为“立圆”，又叫做“丸。

四、勾股定理及其应用

《九章算术》以前虽然已经有了勾股定理，但主要是在天文方面的应用。刘徽在注文中，曾对勾股定理用出入相补原理来论证这一定理，可惜所绘的弦图早已散失，没有能够和注文一起留传下来。

《九章算术》勾股章共 24 题，除了勾股定理及其变形的三个题以及涉及“勾股容方”、“勾股容圆”各 1 题以外，其余 19 个题全是应用问题。

《九章算术》还以率的形式表示出勾股形三边的关系：设勾为 a，股为 b，弦为 c，则：

$$b:a:c=\frac{1}{2}\left(m^2-n^2\right):mn:\frac{1}{2}\left(m^2+n^2\right)$$

此处(c＋b)∶a=m∶n；m，n实际上互素．这是世界数学史上第一次提出完整的勾股数组通解公式．不过，《九章算术》的术文未离开具体数字，刘徽则用出入相补原理对其一般形式作了证明。